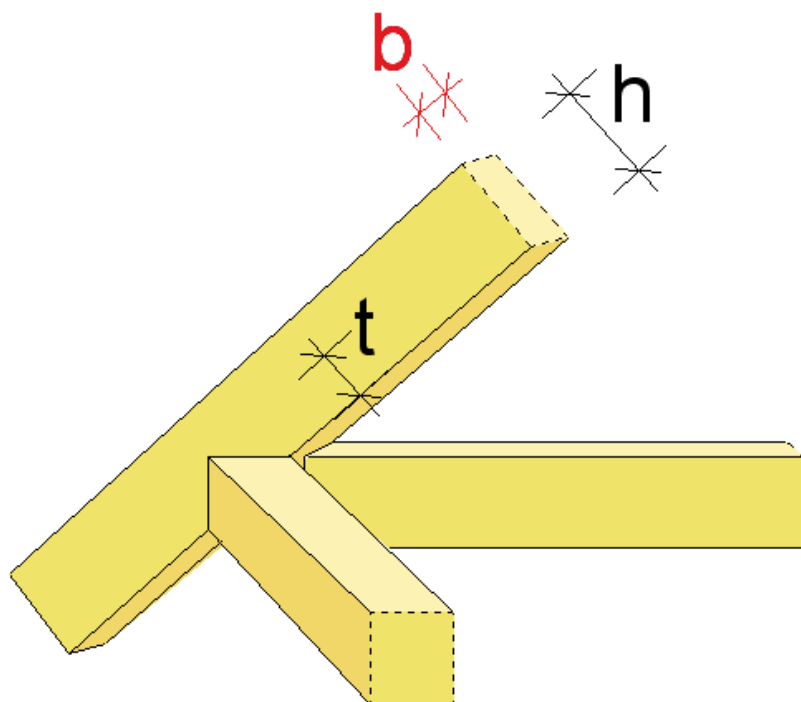


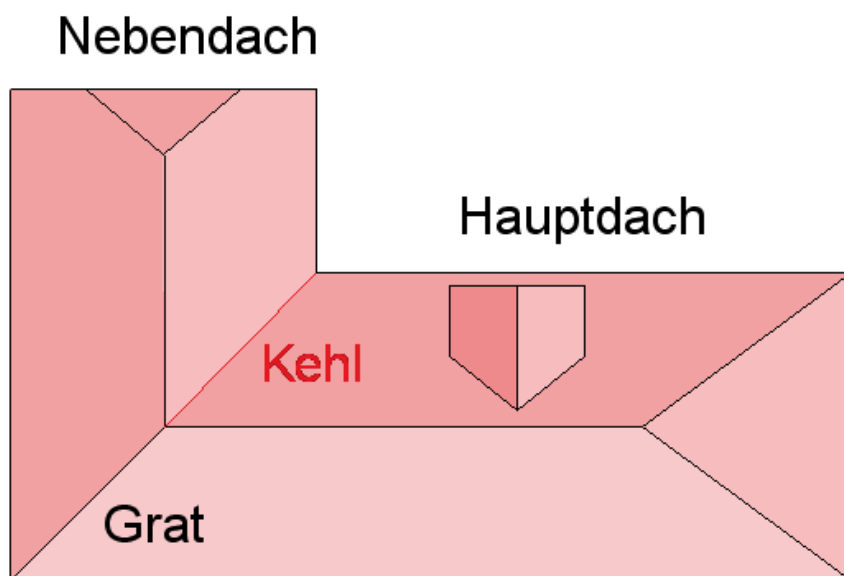
Az élszarufa és a szelemenek kapcsolódásáról

A következőkben a címeli, viszonylag nehéz anyagrész megvilágítását szeretnénk elősegíteni, főként szép és jó ábrákkal.



1. ábra – forrása:

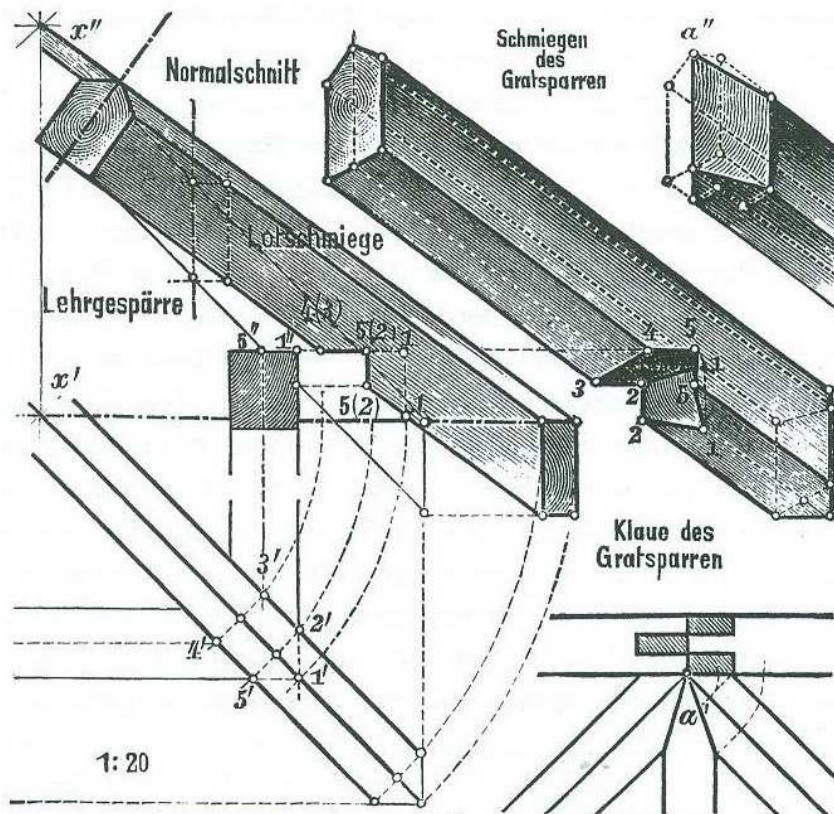
http://www.dikraus.at/Ingenieurbau/Baustatik/Baustatikflyer/S126_01.pdf



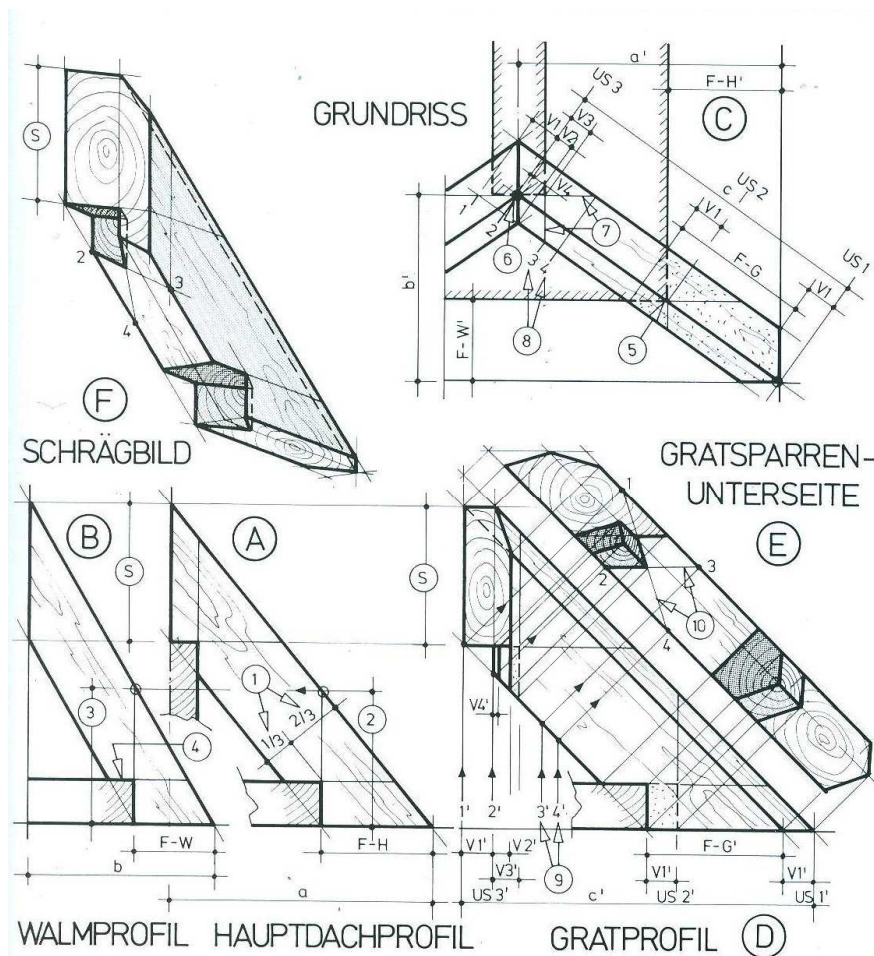
2. ábra – forrása

http://www.dikraus.at/Ingenieurbau/Baustatik/Baustatikflyer/S126_01.pdf

Az 1. ábrán a 2. ábra élszarufájának (Grat) és koszorút képező középszelemenjeinek axonometrikus képe látható. Itt az összemetsződő tetősíkok egyforma hajlásúak.



3. ábra – [1]



4. ábra – [2]

A 3. és a 4. ábrán az ötszög keresztmetszetűre kimunkált élszarufa horgolása (is) látható, többféle ábrázolásban. Itt is az axonometrikus képekre hívjuk fel a figyelmet: ez ritkaság. Amíg a 3. ábrán a metsződő tetősíkok egyező, addig a 4. ábrán eltérő hajlásúak. A 3. ábra axonometrikus képén látjuk, hogy az élszarufa horgolása során kivágják:

~ a középszelemennek felső síkjához illeszkedő, az **12345** csúcsú ötszöget jelentő vízszintes síkidomot;

~ az itt derékszögben kapcsolódó szelemenek külső függőleges síkjaihoz illeszkedő **1551** és **1221** négyszögeket jelentő két függőleges síkidomot.

A 4. ábra axonometrikus képe még abban is eltér a 3. ábrától, hogy az élszarufa alsó végét máshol és máshogyan vágják le. A 4. ábra **E** részén a megmunkált élszarufa *alulnézeti képét* is megszerkesztették. Csak csodálhatjuk a rajz készítőinek gondosságát és precizitását.

A fakötést elkészítő kötőácsnak – vagy az ácsüzemi CNC megmunkálógép program - készítőjének – ismernie kell néhány geometriai adatot a munkához.

Ezek közül a legérdekesebbnek, legfontosabbnak tűnik az

~ az egy szög, amelyet egyező hajlású összemetsződő tetők, illetve az

~ a két szög, amelyet eltérő hajlású összemetsződő tetők esetében a 3. ábrán jelölt **15** és **12** egyenesek zárnak be az élszarufa hosszirányú élével.

Most e szögek meghatározásával foglalkozunk, [3] alapján.

Először azt figyeljük meg, hogy az **15** és **12** egyeneseket az élszarufát megtámasztó, egymást itt derékszögben metsző tengelyű szelemenek oldalának egymásra merőleges helyzetű függőleges síkjai metszik ki a szarufát alulról határoló ferde síkból.

Most tekintsük az 5. ábrát is!

Itt egy különböző – φ_1 és φ_2 – hajlású tetősíkokkal bíró, téglalap alaprajzú kontyvetőt ábrázoltunk axonometrikusan. Az élgerinc (az élszarufa) valódi hossza **h**, hajlása φ , az élgerinc alaprajzi vetületének hossza **c**, amely az itt derékszögű ereszsarkot ε_1 és ε_2 szögekre osztja fel. A sárgára színezett **S** síkot kifeszítik a **CD** élgerinc egyenese és a rá merőleges **AB** egyenese. Mondhatjuk, hogy

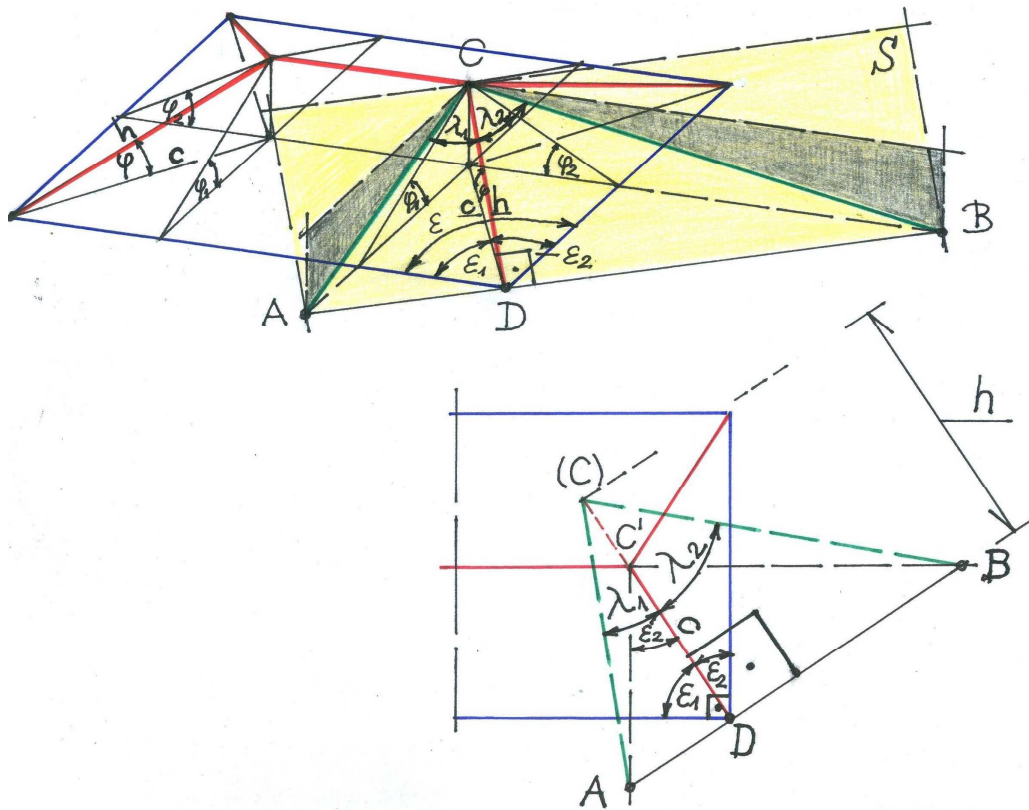
~ a **CD** élgerinc egyenese az **S** sík esésvonala,

~ az **AB** egyenes pedig az **S** síknak a **D** ereszsarkon átmenő szintvonala.

Belátjuk, hogy az **AC'** és a **BC'** szakaszokat tartalmazó függőleges síkok – az ábrán szürkére színezve – az **S** síkból kimetszik a zöld **AC** és **CB** szakaszokat tartalmazó egyeneseket, melyeknek az élgerinccel bezárt λ_1 és λ_2 szögei a keresett szögek.

A mellékábrán azt szemléltethetjük, hogy az **ABC** háromszöget az **AB** oldala – mint forgástengely – körül a vízszintes síkba forgattuk, melynek eredményeként az ábrán a keresett szögek valódi nagyságukban jelennek meg. Méretarányos ábra esetén ezek nagysága onnan közvetlenül lemérhető. Itt azonban számítással haladunk tovább.

Előtte még rögzítjük: minthogy a kontyrész ereszével párhuzamos nyomvonalú **AC'C** függőleges sík metszi ki a λ_1 - et meghatározó **AC** szakaszt, ezért a 3. ábrán ennek megfelel az élszarufa „hasára” rajzolt **12** szakasz és a szarufaél által közbezárt hegyesszög.



5. ábra

Az 5. ábra szerint a számítás:

$$\overline{AD} = c \cdot \operatorname{tg} \epsilon_2 = h \cdot \operatorname{tg} \lambda_1 ,$$

innen:

$$\operatorname{tg} \lambda_1 = \frac{c}{h} \cdot \operatorname{tg} \epsilon_2 ; \quad (1)$$

de mivel

$$\frac{c}{h} = \cos \varphi , \quad (2)$$

ezért (1) és (2) - vel:

$$\underline{\operatorname{tg} \lambda_1 = \cos \varphi \cdot \operatorname{tg} \epsilon_2} . \quad (3)$$

Teljesen hasonlóan:

$$\left. \begin{aligned} \overline{BD} &= c \cdot \operatorname{tg} \epsilon_1 = h \cdot \operatorname{tg} \lambda_2 , \\ \operatorname{tg} \lambda_2 &= \frac{c}{h} \cdot \operatorname{tg} \epsilon_1 , \\ \frac{c}{h} &= \cos \varphi , \end{aligned} \right\} \rightarrow \underline{\operatorname{tg} \lambda_2 = \cos \varphi \cdot \operatorname{tg} \epsilon_1} . \quad (4)$$

Ezzel valójában már meg is oldottuk a kitűzött feladatot, hiszen a többi mennyiség egymással ismert összefüggésben van. Itt egy előző dolgozatunkra hivatkozunk:

ED - 1: A szintvonalas eljárásról; ebben levezetjük az alábbi összefüggéseket, itt α helyett φ - vel dolgozva:

$$\operatorname{tg} \varepsilon_1 = \frac{\sin \varepsilon}{\frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\operatorname{tg} \varphi_2} + \cos \varepsilon}, \quad (\text{E1})$$

amiből $\varepsilon = 90^\circ$ esetére:

$$\operatorname{tg} \varepsilon_1 = \frac{\operatorname{tg} \varphi_2}{\operatorname{tg} \varphi_1}. \quad (5 / 1)$$

Innen:

$$\varepsilon_1 = \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} \varphi_2}{\operatorname{tg} \varphi_1} \right). \quad (5)$$

Hasonlóképpen:

$$\operatorname{tg} \varepsilon_2 = \frac{\sin \varepsilon}{\frac{\operatorname{tg} \varphi_2}{\operatorname{tg} \varphi_1} + \cos \varepsilon}, \quad (\text{E2})$$

amiből $\varepsilon = 90^\circ$ esetére:

$$\operatorname{tg} \varepsilon_2 = \frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\operatorname{tg} \varphi_2}. \quad (6 / 1)$$

Innen:

$$\varepsilon_2 = \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\operatorname{tg} \varphi_2} \right). \quad (6)$$

Másként:

$$\varepsilon_2 = \varepsilon - \varepsilon_1 = 90^\circ - \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} \varphi_2}{\operatorname{tg} \varphi_1} \right). \quad (6 / 2)$$

Ismét **ED - 1** - ből:

$$\operatorname{tg} \varphi = \sin \varepsilon_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi_1 = \sin \varepsilon_2 \cdot \operatorname{tg} \varphi_2, \quad (\text{E3})$$

amivel meg is vannak a keresett segédmenntiségek, a tetőhajlásokkal kifejezve.

Megjegyzések:

M1. Elvégezve a (3) és (4) -ből adódó

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= \arctg(\cos \varphi \cdot \operatorname{tg} \varepsilon_2) , \\ \lambda_2 &= \arctg(\cos \varphi \cdot \operatorname{tg} \varepsilon_1) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

képletekben az ε_1 , ε_2 , φ mennyiségek kiküszöbölését az (5 / 1), (6 / 1) és az (E3) képletekkel, azonos átalakításokkal az alábbi végeredményeket kapjuk:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= \arctg \left[\frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\operatorname{tg} \varphi_2} \cdot \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\operatorname{tg} \varphi_2} \right)^2}{1 + \left(\frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\operatorname{tg} \varphi_2} \right)^2 + \operatorname{tg}^2 \varphi_1}} \right] , \\ \lambda_2 &= \arctg \left[\frac{\operatorname{tg} \varphi_2}{\operatorname{tg} \varphi_1} \cdot \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{\operatorname{tg} \varphi_2}{\operatorname{tg} \varphi_1} \right)^2}{1 + \left(\frac{\operatorname{tg} \varphi_2}{\operatorname{tg} \varphi_1} \right)^2 + \operatorname{tg}^2 \varphi_2}} \right] . \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

M2. A görög ábécé α , β , γ , δ , ε betűit már korábban felhasználtuk, szintén tető - geometriai tárgyú dolgozatainkban, ezért ezeket másra itt már nem alkalmazhattuk. Ehhez lásd még:

~ ED - 2: *Az élszarufához simuló csonkaszarufa - végek vágási szögeinek meghatározása;*

~ ED - 3: *Az ötszög keresztmetszetű élszarufa keresztmetszetének kialakításáról* című előző dolgozatainkat is!

M3. Egy speciális eset: azonos tetőhajlások esete; ekkor:

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi^* ; \quad (*)$$

most (5) és (6 / 2) -ből:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 45^\circ ; \quad (a)$$

majd (a) - ből:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \varepsilon_1 = \operatorname{tg} \varepsilon_2 = 1 , \\ \sin \varepsilon_1 = \sin \varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} . \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

Most (E3) és (b) - vel:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \operatorname{tg} \varphi^* . \quad (c)$$

Majd egy ismert azonossággal és (c) - vel:

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{2} \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi^*}} , \quad (d)$$

ezután pedig (7), (b) és (d) - vel:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{2} \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi^*}} \right) . \quad (e)$$

M4. Az internetről vett 1. ábra talán kissé elnagyolt; mégis, kezdésnek talán megfelelő.

M5. Lényeges, hogy az itt levezetett képletek csak derékszögű eresz - csatlakozás esetére érvényesek. Általánosabb esetekre újabb levezetésre lesz szükség.

M6. A http://www.bubiza.de/fileadmin/Bilder/Download/sonst_pdf/EC5-Formelsammlung.pdf internet - címen (7) - hez nagyon hasonló képletek találhatóak, a *Rechnerischer Abbund* alcím alatt, a 31. oldalon, levezetés nélkül. A képletek egymásnak való megfeleltetése, az 5., 6. ábrával és (7) - tel is:

$$\left. \begin{aligned} r_H = \operatorname{atn} \left(\frac{\cos \alpha_G}{\operatorname{tg} \beta_H} \right) &\rightarrow \operatorname{arctg} \left(\frac{\cos \varphi}{\operatorname{tg} \varepsilon_1} \right) = \operatorname{arctg} (\cos \varphi \cdot \operatorname{tg} \varepsilon_2) = \lambda_1 , \\ p_H = \operatorname{atn} (\cos \alpha_G \cdot \operatorname{tg} \beta_H) &\rightarrow \operatorname{arctg} (\cos \varphi \cdot \operatorname{tg} \varepsilon_1) = \lambda_2 . \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

Abschnitts- u. Kervenfluchtrisse auf Gratsparrenoberseite

Rechtwinklig zur HD-Traufe :

$$r_H = \text{atn} (\cos \alpha_G : \tan \beta_H)$$

Maschinenwinkel für Schnitt entlang r_H :

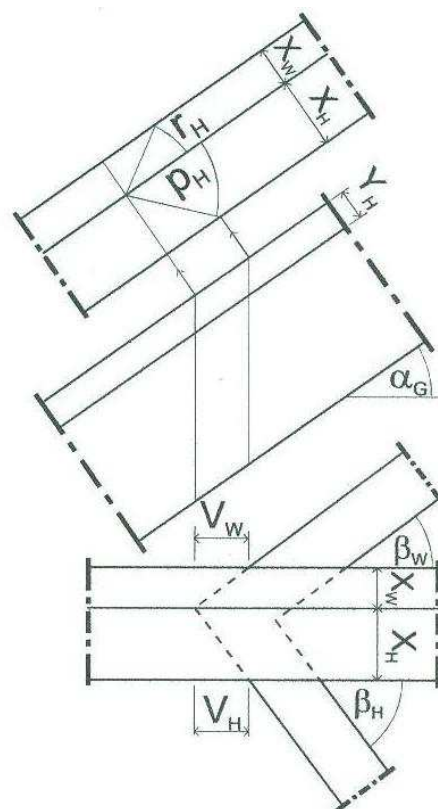
$$m_R = \text{atn} (\sin r_H \cdot \tan \alpha_G)$$

Parallel zur HD-Traufe :

$$p_H = \text{atn} (\cos \alpha_G \cdot \tan \beta_H)$$

Maschinenwinkel für Schnitt entlang p_H :

$$m_P = \text{atn} (\sin p_H \cdot \tan \alpha_G)$$



6. ábra

M7. A 6. ábrán jelölt r_H és p_H szögek az ábra alapján is számíthatók:

$$\text{tgr}_H = \frac{X_W}{t_W} = \frac{X_W}{\frac{V_W}{\cos \alpha_G}} = \frac{X_W}{V_W} \cdot \cos \alpha_G = \text{tg} \beta_W \cdot \cos \alpha_G = \frac{\cos \alpha_G}{\text{tg} \beta_H} ,$$

innen:

$$\underline{r_H = \text{arctg} \left(\frac{\cos \alpha_G}{\text{tg} \beta_H} \right) .} \quad (g)$$

Hasonlóan:

$$\text{tgp}_H = \frac{X_H}{t_H} = \frac{X_H}{\frac{V_H}{\cos \alpha_G}} = \frac{X_H}{V_H} \cdot \cos \alpha_G = \text{tg} \beta_H \cdot \cos \alpha_G = \cos \alpha_G \cdot \text{tg} \beta_H ,$$

innen:

$$\underline{p_H = \text{arctg} (\cos \alpha_G \cdot \text{tg} \beta_H) .} \quad (h)$$

A 6. ábrán a t_W és a t_H segédmenntiségek nincsenek feltüntetve.

M8. Az a tény, hogy már a faépítésben mértékadó Eurocode 5 (EC 5) is tartalmaz képleteket alapvető kötőács - feladatok számítással történő megoldásához, azt jelzi, hogy a magyar nyelvű – egyébként szinte nem is létező – számításos (nem szerkesztéses!) ács szakirodalomnak bőven lenne mit bepótolnia.

Irodalom:

[1] – ***Franz Stade***: Die Holzkonstruktionen
Reprint Verlag Leipzig, 2011.

[2] – ***Willibald Mannes***: Dachkonstruktionen in Holz
4. Auflage, Deutsche Verlags - Anstalt, 1994.

[3] – ***Fritz Kress ~ Ewald Maushake***: Dachausmittlung und Schiftung
Bruderverlag, Karlsruhe, 1998.

Összeállította: ***Galgóczi Gyula***
mérnöktanár

Szödliget, 2013. április 10.